

Wolfgang Betz, Iason Papaioannou, Daniel Straub

Ermittlung der Betondruckfestigkeit in Bestandsbauten

Es wird ein probabilistischer Ansatz vorgestellt, um die Kennwerte und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Betondruckfestigkeit basierend auf (i) Messdaten und (ii) aus der Planungsphase vorhandenen Informationen zu bestimmen. Der resultierende charakteristische Wert der Betondruckfestigkeit f_{ck} kann für Nachweise mit dem semiprobabilistischen Teilsicherheitskonzept verwendet werden, während die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Zuverlässigkeitsanalysen und weitergehende Untersuchungen benutzt werden kann. Der Ansatz ist in einem frei verwendbaren Web-Tool umgesetzt.

Stichworte Betondruckfestigkeit; charakteristischer Wert; Messdaten; Probabilistik; Wahrscheinlichkeit

Assessing the compressive strength of concrete in existing structures

A probabilistic approach is presented to determine the characteristic values and the probability distribution of the concrete compressive strength based on (i) measurement data and (ii) information available from the design phase. The resulting characteristic value of the concrete compressive strength, f_{ck} , can be used for verifications according to the semi-probabilistic partial safety concept, while the probability distribution can be used for reliability analysis and further investigations. The approach is implemented in a freely available web tool.

Keywords concrete compressive strength; characteristic value; measurement data; probability

1 Einführung

Bei bestehenden Tragwerken wurden die Materialkennwerte auf Grundlage der zum Planungszeitpunkt gültigen historischer Regelwerke festgelegt. Für eine Überprüfung der Tragwerkszuverlässigkeit im Zuge einer Nachrechnung müssen Materialkennwerte bestimmt werden, welche mit den heutigen Regelwerken kompatibel sind.

Für Tragwerkselemente aus Beton kann die Festlegung eines charakteristischen Wertes für die Betondruckfestigkeit anspruchsvoll sein, weil sowohl die verwendeten Betongüteklassen als auch die zugrundeliegenden Prüfbedingungen im Laufe der Zeit angepasst wurden. Eine umfassende Auswertung, wie charakteristische Betondruckfestigkeiten für historische Betongüteklassen ermittelt werden können, ist in [1] zu finden. Die Ermittlung der charakteristische Betondruckfestigkeit ausgehend von am Tragwerk durchgeführten Messungen ist in [2] und [3] geregelt. Sollen allerdings Informationen zur damals verbauten Betongüteklasse mit Messdaten kombiniert werden, um eine charakteristische Betondruckfestigkeit abzuleiten, so steht gegenwärtig keine eindeutige Handlungsempfehlung zur Verfügung.

Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Betondruckfestigkeit bestehender Bauwerke zu quantifizieren und einen charakteristischen Wert aus Messdaten in Kombination mit bereits vorhandenen Informationen zur Betondruckfestigkeit zu bestimmen, haben wir eine frei verfügbare Web-App entwickelt [4]. Die in dieser Web-App angewendete Methodik wird im Folgenden erläutert.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf im Rahmen von Nachuntersuchungen am Bauteil ermittelte Messwerte. Grundsätzlich können im vorgestellten probabilistischen Ansatz jedoch auch ggf. vorhandene Daten aus der Erstprüfung sowie aus Konformitätsprüfungen gemäß DIN EN 12390-3 bzw. ÖNORM B 4710-1 berücksichtigt werden. Diese Informationen werden am besten in einem vorgelagerten Modellierungsschritt direkt in die A-priori-Verteilung integriert. Dabei ist zu beachten, dass die tatsächliche Festigkeit des im Bauwerk eingebauten Betons durch Einflüsse wie Transport, Verarbeitung, Witterung oder Personal zusätzlich streuen kann. Im Gegensatz dazu weisen unter Laborbedingungen hergestellte Prüfkörper typischerweise systematisch höhere Festigkeitswerte auf – etwa aufgrund optimaler Verdichtung, idealer Lagerbedingungen sowie des Fehlens baustellenüblicher Temperatureinflüsse oder Austrocknung.

2 Wahl von Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Beschreibung der Betondruckfestigkeit

2.1 Probabilistischer Modellansatz

Der Wert der Betondruckfestigkeit F_c ist innerhalb eines Bauteils räumlichen Schwankungen unterworfen [5]. Der charakteristische Wert f_{ck} der Betondruckfestigkeit ist als 5%-Quantil der

zugrundeliegenden Verteilungsfunktion $P_{F_c}(\cdot)$ von F_c definiert. Im hier vorgestellten Verfahren wird diese Verteilung aus Messdaten und aus der Planungsphase vorhandenen Informationen bestimmt.

Das Bayes'sche Verfahren ermöglicht es, Informationen aus verschiedenen Quellen zu kombinieren. Dieses Verfahren ist auch die Grundlage für die Bestimmung von charakteristischen Werten gemäß Anhang D des Eurocode 0 [6] (siehe hierzu auch Abschnitt 2.10 in [7][7]). In einem Bayes'schen Ansatz wird das vorhandene Vorwissen (vor Durchführung der Messungen) als A-priori-Verteilung quantifiziert. Hierzu wird die Unsicherheit über die Parameter θ der Verteilungsfunktion $P_{F_c}(\cdot | \theta)$ probabilistisch erfasst. Der Zusammenhang zwischen den Messdaten \mathbf{D} und den Parametern θ wird mittels der Likelihood-Funktion $L(\theta | \mathbf{D})$ beschrieben. Die finale A-posteriori-Verteilung bestimmt sich durch die Kombination der A-priori-Verteilung und der Likelihood-Funktion [8].

Alterungseffekte (d.h. eine mögliche Zunahme der Betondruckfestigkeit bedingt durch die Alterung des Betons) werden im Folgenden lediglich implizit über die gewonnenen Messdaten berücksichtigt.

2.2 Verteilungstyp der Messdaten

Als Verteilungstyp für die Betondruckfestigkeit wird meist eine Normal- oder Log-Normalverteilung verwendet [9][10][11]. Der in [2] und [3] verwendete Modellansatz zur Ableitung der charakteristischen Betondruckfestigkeit aus Messdaten basiert auf einer Normalverteilung. Allerdings können normal-verteilte Größen negative Werte annehmen. In der Praxis treten Problemen mit negativen Festigkeitswerten insbesondere in Kombination mit großen Variationskoeffizienten auf [11]. Solche finden sich gerade bei Bestandsbauten.

In den Anhängen C und D des Eurocode 0 [6] wird für die Beschreibung der Unsicherheiten von Widerstandsgrößen die Log-Normalverteilung verwendet, welche auf positive Werte beschränkt ist. Auch das im ‚JCSS probabilistic model code‘ [12] verwendete Modell für die probabilistische Beschreibung der Betondruckfestigkeit basiert auf log-normalverteilten Messdaten. Gerade bei stark streuenden Messdaten können charakteristische Werte mit der Log-Normalverteilung oft realistischer erfasst werden als mit einer Normalverteilung [11], insbesondere weil log-normalverteilte Größen keine negativen Werte annehmen können. Die mit einer Normalverteilung ermittelten charakteristischen Werte liegen bei großen

Variationskoeffizienten deutlich auf der sicheren Seite, was zu einem Anstieg der verdeckten Sicherheit [13][14] führen kann.

Im Folgenden wird als Verteilung der Messwerte der Betondruckfestigkeit eine Log-Normalverteilung angesetzt. Die log-transformierte Festigkeit folgt damit einer Normalverteilung mit Mittelwert θ_1 und Präzision θ_2 (bzw. Standardabweichung $1/\sqrt{\theta_2}$).

Die Likelihood-Funktion $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$ beschreibt die Plausibilität der Messwerte \mathbf{D} aus den Betondruckfestigkeitsprüfungen als Funktion der Parameter $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]$. Die Likelihood-Funktion [8] eines Messwertes d_i ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Log-Normalverteilung:

$$L(\theta_1, \theta_2 | d_i) = \frac{\sqrt{\theta_2}}{d_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta_2(\ln d_i - \theta_1)^2}{2}\right), \quad (1)$$

Die einzelnen Messwerte d_1, \dots, d_n werden als näherungsweise unabhängig angesetzt. Die Likelihood-Funktion der Messdaten $\mathbf{D} = \{d_1, \dots, d_n\}$ ist demzufolge:

$$L(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{D}) = \prod_{i=1}^n L(\theta_1, \theta_2 | d_i). \quad (2)$$

Ein erweiterter Ansatz, welcher eine mögliche Abhängigkeit in den Messdaten berücksichtigt, wird in [5] vorgeschlagen.

2.3 Verteilungstyp der A-priori-Verteilung

Für die A-priori-Verteilung der Parameter (θ_1, θ_2) wird eine Normal-Gamma-Verteilung, $(\theta_1, \theta_2) \sim \mathcal{NG}(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0, \kappa_0, \eta_0, \xi_0^2)$ gewählt (Abschnitt 3.1.5 in [12]; in [12] werden die Parameter $\gamma_0, \kappa_0, \eta_0, \xi_0$ als m', n', v', s' bezeichnet):

$$p(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0, \kappa_0, \eta_0, \xi_0^2) \propto \theta_2^{\frac{\eta_0 - 1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \theta_2 (\eta_0 \xi_0^2 + \kappa_0 (\theta_1 - \gamma_0)^2)\right) \quad (3)$$

Für die normalverteilten log-transformierten Messdaten ist die Normal-Gamma-Verteilung eine sogenannte konjugierte A-priori-Verteilung. Dies ermöglicht eine analytische Lösung, weil die A-posteriori-Verteilung damit ebenfalls einer Normal-Gamma-Verteilung entspricht.

3 Berücksichtigung von Messdaten

Die Messwerte d_1, \dots, d_n sind bezogen auf Bohrkerne mit einem Seitenverhältnis

(Höhe/Durchmesser) von 2:1; die Festigkeitswerte andersartiger Prüfkörper sind mit einem Korrekturfaktor umzurechnen [2]. Zunächst werden aus den log-transformierten Messdaten das Strichprobenmittel m und die Stichprobenvarianz s^2 berechnet (siehe Appendix A):

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log d_i \quad (4)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log d_i - m)^2 \quad (5)$$

Die Parameter der A-posteriori-Verteilung von θ_1 und θ_2 können mit den Größen m und s^2 wie folgt ermittelt werden:

$$\gamma_n = \frac{\kappa_0 \gamma_0 + nm}{\kappa_0 + n}, \quad (6)$$

$$\kappa_n = \kappa_0 + n, \quad (7)$$

$$\eta_n = \eta_0 + n, \quad (8)$$

$$\xi_n^2 = \frac{\eta_0}{\eta_0 + n} \xi_0^2 + \frac{n}{\eta_0 + n} \left(s^2 + \frac{\kappa_0 (m - \gamma_0)^2}{\kappa_0 + n} \right). \quad (9)$$

Für die praktische Anwendung ist weniger die A-posteriori-Verteilung der Modellparameter θ_1 und θ_2 von Interesse, sondern vielmehr die daraus abgeleitete Verteilung der Betondruckfestigkeit F_c . Für gegebene Werte von θ_1 und θ_2 folgt F_c einer Log-Normalverteilung. Wird die Unsicherheit in den Parametern mitberücksichtigt, ergibt sich durch Marginalisierung die prädiktive Verteilung von F_c [8]. Diese beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung zukünftiger oder unbeobachteter Festigkeiten unter Berücksichtigung der aus den Daten abgeleiteten Unsicherheit in θ_1 und θ_2 . Die prädiktive Verteilung der Betondruckfestigkeit F_c ist im vorliegenden Fall eine log-t Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$p_{F_c}(f_c | \gamma_n, \tau_n, \eta_n) = \frac{1}{f_c \cdot \tau_n} \cdot p_{t_{\eta_n}} \left(\frac{\ln f_c - \gamma_n}{\tau_n} \right), \quad (10)$$

mit $p_{t_{\eta_n}}(\cdot)$ als die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Student- t -Verteilung mit η_n Freiheitsgraden. Der Hilfsparameter τ_n ist wie folgt definiert:

$$\tau_n = \sqrt{\xi_n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\kappa_n}\right)}. \quad (11)$$

Die Verteilungsfunktion $P_{F_c}(\cdot)$ der Betondruckfestigkeit F_c kann mit Hilfe der Verteilungsfunktion $P_{t_{\eta_n}}$ der Student-t-Verteilung mit η_n Freiheitsgraden ausgedrückt werden als:

$$P_{F_c}(f_c | \gamma_n, \tau_n, \eta_n) = P_{t_{\eta_n}}\left(\frac{\ln f_c - \gamma_n}{\tau_n}\right). \quad (12)$$

Der charakteristische Wert der Betondruckfestigkeit f_{ck} ist definiert als $P_{F_c}(f_{ck} | \gamma_n, \tau_n, \eta_n) = 5\%$ und kann problemlos numerisch bestimmt werden.

Die der prädiktiven Verteilung der Betondruckfestigkeit F_c zugrundeliegende log- t Verteilung besitzt keine finiten Momente (einschließlich des Erwartungswertes und der Varianz), unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade η_n . Für die Verteilung von F_c kann deshalb kein Mittelwert oder Variationskoeffizient berechnet werden. In der praktischen Anwendung führt diese Eigenschaft allerdings meist nicht zu Problemen – insbesondere können die charakteristischen Werte bestimmt werden und die strukturelle Zuverlässigkeit berechnet werden.

4 Berücksichtigung von Informationen zur verbauten Betongüteklasse

Ergänzend zu den Messdaten sollten vorhandene statistische Vorinformationen zur Betondruckfestigkeit berücksichtigt werden. Solch ein Vorgehen wird auch im informativen Anhang D des Eurocode 0 [6] empfohlen. Hierzu sind die Werte der Verteilungsparameter der A-priori-Verteilung so zu wählen, dass das zur Betondruckfestigkeit vorhandene Vorwissen möglichst gut quantifiziert wird.

4.1 Informationsgehalt der A-priori-Verteilung

Der Parameter κ_0 repräsentiert den Informationsgehalt der A-priori-Verteilung für den Parameter θ_1 . Analog hierzu repräsentiert η_0 den Informationsgehalt der A-priori-Verteilung für den Parameter θ_2 . Die Werte von κ_0 und η_0 werden unabhängig von der Betonfestigkeitsklasse gesetzt (entsprechend Abschnitt 3.1.5 in [12]). In Übereinstimmung mit [12] wird $\kappa_0 = 3$ gewählt. Abweichend von [12], wird $\eta_0 = 7$ gesetzt (und nicht mit einem Wert von 10 belegt, um die Vorinformation zur Streuung etwas weniger stark zu gewichten).

Die Werte für γ_0 und ξ_0^2 werden in Abhängigkeit der Betonfestigkeitsklasse gewählt.

Sollen zusätzlich zur bekannten Betonfestigkeitsklasse auch Informationen aus einer Erstprüfung bzw. aus Konformitätsprüfungen berücksichtigt werden, so ist die verwendete A-priori-Verteilung entsprechend anzupassen. Idealerweise geschieht dies durch einen vorgeschalteten zusätzlichen Bayes'schen Modellierungsschritt, in welchem diese Informationen über eine separate Likelihood-Funktion quantifiziert werden.

4.2 Betonfestigkeitsklassen nach Eurocode 2

Für Beton, welcher den aktuell gültigen Betonfestigkeitsklassen entspricht, sind charakteristische Werte f_{ck} für die Betondruckfestigkeit und Werte f_{cm} für die mittlere Betondruckfestigkeit in EN 1992-2 [15] definiert. Mögliche Werte für die Verteilungsparameter der A-priori-Verteilung der Betondruckfestigkeit in Abhängigkeit der Betonfestigkeitsklasse werden in [12] vorgeschlagen.

Wir verwenden geringfügig angepasste Werte für die Verteilungsparameter der A-priori-Verteilung, welche die in [15] gegebenen Werte für f_{ck} exakt einhalten. Der Wert für f_{cm} wird dabei als Median interpretiert, womit die Streuung in der A-priori-Verteilung tendenziell etwas überschätzt wird. Somit ist $\gamma_0 = \exp(f_{cm})$. Der Wert ξ_0^2 wird numerisch so bestimmt, dass das 5%-Quantil dem Wert von f_{ck} entspricht.

Die A-priori Werte für f_{ck} und f_{cm} sind gegebenenfalls gemäß [15] mit einem Korrekturfaktor zu modifizieren, um (i) die Umrechnung von unter Laborbedingungen ermittelten Druckfestigkeiten auf die im Bauteil wirksame Festigkeit, (ii) den Einfluss langzeitbedingter Festigkeitsreduktionen sowie (iii) eine mögliche Festigkeitszunahme infolge des fortschreitenden Erhärtungsprozesses bei älteren Bauteilen zu berücksichtigen.

4.3 Historische Betonfestigkeitsklassen

Die Bestimmung charakteristischer Betondruckfestigkeiten basierend auf historischen Betongüteklassen wird in [1] analysiert. Dabei wird in [1] auch die Streuung der Festigkeitswerte von historischem Beton diskutiert.

Für zwischen 1972 und 2001 verwendete Betongüten und -klassen weicht primär die Geometrie der verwendeten Prüfkörper von den heutigen Bestimmungen ab. Entsprechend ist der damals verwendete charakteristische Wert mit einem Faktor von 0,773 zu multiplizieren um ein f_{ck} nach heutigem Standard zu erhalten [1]. Um mögliche Transformationsunsicherheit zu erfassen, modellieren wir ergänzend zu [1] diesen Umrechnungsfaktor als unsichere Größe mit

Erwartungswert 0,773 und einem Variationskoeffizienten von 10%. Die Streuung der Betondruckfestigkeiten selbst wird analog zu [1] als äquivalent zu den heutigen Betonfestigkeitsklassen eingestuft.

Zwischen 1916 und 1972 wurden, zur Klassifizierung der Betonfestigkeit, Mittelwerte anstelle charakteristischer Festigkeitswerte verwendet. Diese mittleren Festigkeiten müssen angepasst werden, um Unterschiede in der Geometrie der verwendeten Prüfkörper zu berücksichtigen. Auch für diesen Zeitraum kann der multiplikative Faktor 0,773 verwendet werden [1], welcher im probabilistischen Modell wiederum als unsichere Größe mit 10% Variationskoeffizient abgebildet wird. Die Streuung der Betondruckfestigkeiten selbst wird in Abhängigkeit der Qualität der Betonherstellung und Ausführung eingestuft. Angelehnt an [1] wird folgende Einstufung verwendet: (A) Großbaustelle, 30 und mehr Betonproben, Zumessung nach Gewicht, Überwachung durch Betoningenieur; (B) mittlere Baustelle, 3-10 Betonproben, Zumessung nach Volumen oder Gewicht, Überwachung durch Polier; (C) kleine Baustelle, keine Betonproben, Zumessung nach Volumen, Überwachung durch Polier. Für mittlere Betondruckfestigkeiten kleiner als 20 N/mm² wird der Variationskoeffizient festgelegt: für (A) 20%, (B) 28% und (C) 35%. Für höhere Werte der mittleren Betondruckfestigkeit wird die Standardabweichung festgelegt: für (A) 4,0 N/mm², (B) 5,5 N/mm² und (C) 7,5 N/mm².

4.4 Keine Vorinformation vorhanden

Sind keine statistischen Vorinformationen verfügbar, so kann eine nichtinformativ A-priori-Verteilung gewählt werden. Für die in Glg. (3) verwendete Parametrisierung ergibt sich eine solche für $\kappa_0 = 0$ und $\eta_0 = 0$, unabhängig von den Werten von γ_0 und ξ_0^2 .

Mit diesen Parameterwerten entspricht das obig dokumentierte Verfahren zur Ableitung charakteristischer Werte dem in Abschnitt D.7 von [6] dokumentierten Ansatz (bei Anwendung einer lognormalen Verteilung).

5 Anwendungsbeispiel

5.1 Beispiel 1: Messwerte mit großer Streuung

Für ein in den 80ern errichtetes Gebäude in der Schweiz wurde die Zuverlässigkeit einer Decke gegen Durchstanzen untersucht. In der betrachteten Decke wurde planmäßig C35/45 verbaut. Bohrkernentnahmen ergaben folgende, auf den Referenzzylinder bezogene, Festigkeitswerte: [41,3; 34,0; 27,2; 41,6; 44,9; 37,2; 41,9; 43,0; 48,0; 37,5] in N/mm².

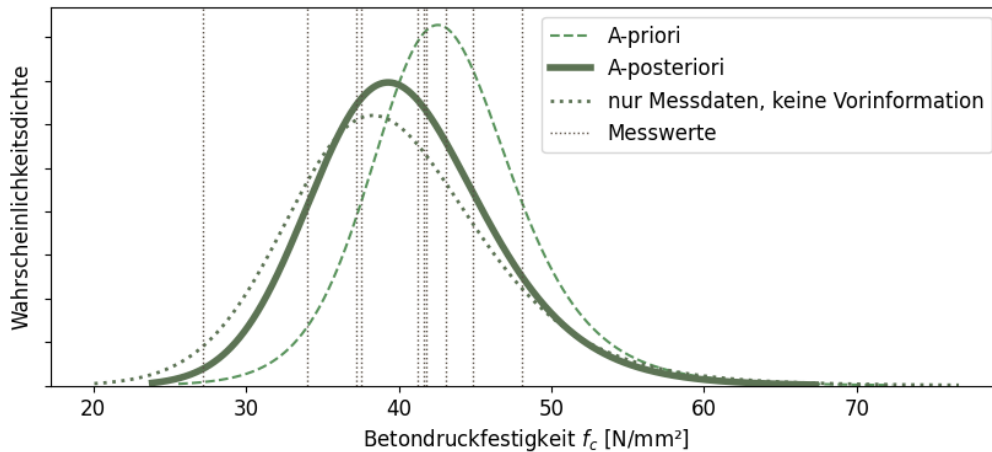


Bild 1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das Anwendungsbeispiel 1.

Probability distributions of the first application example.

Die sich für dieses Beispiel ergebenden Verteilungen sind in Bild 1 dargestellt. Für die Betondruckfestigkeitsklasse C35/45 werden folgende Verteilungskennwerte für die A-priori-Verteilung erhalten: $\gamma_0 = 3,76$; $\kappa_0 = 3$; $\eta_0 = 7$ und $\xi_0 = 0,09$.

Das Stichprobenmittel der zehn Messdaten beträgt $39,7 \text{ N/mm}^2$. Die Stichprobenstandardabweichung ist $5,6 \text{ N/mm}^2$. Für die log-transformierten Werte der Messdaten wird ein Stichprobenmittel von $m = 3,67$ und eine Stichprobenvarianz von $s^2 = 0,024$ erhalten.

Entsprechend ergeben sich folgende Verteilungskennwerte für die A-posteriori-Verteilung gemäß Glg. (6)-(9): $\gamma_n = 3,69$; $\kappa_n = 13$; $\eta_n = 17$ und $\xi_n = 0,14$. Aus der A-posteriori-Verteilung wird eine charakteristische Betondruckfestigkeit von $f_{ck} = 31,3 \text{ N/mm}^2$ abgeleitet. Der Wert der charakteristischen Betondruckfestigkeit unter Berücksichtigung der Messdaten und der vorhandenen statistischen Vorinformationen liegt somit unter dem Wert von 35 N/mm^2 , welcher ohne Einbezug der Messdaten für einen Beton C34/45 angesetzt werden würde. Ursächlich für die Abminderung der charakteristischen Festigkeit ist in erster Linie die große Streuung der Messdaten.

Bleibt die vorhandene Vorinformation über die Betondruckfestigkeitsklasse unberücksichtigt, beträgt die charakteristische Betondruckfestigkeit $29,3 \text{ N/mm}^2$.

5.2 Beispiel 2: Messwerte mit geringer Streuung

Für eine andere Decke im selben Gebäude, ebenfalls mit C35/45 ausgeführt, wurden folgende, auf den Referenzzylinder bezogene, Festigkeitswerte gemessen: [43,5; 47,4; 53,2; 50,0; 51,4; 45,3; 46,2; 44,2; 43,3; 46,8] in N/mm^2 . In diesem Fall wird A-posteriori eine charakteristische

Betondruckfestigkeit von $f_{ck} = 39,4 \text{ N/mm}^2$ ermittelt, welche den A-priori Wert der Betondruckfestigkeit von 35 N/mm^2 übersteigt. Ohne Berücksichtigung der Vorinformation ergibt sich eine charakteristische Betondruckfestigkeit von $41,4 \text{ N/mm}^2$. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind in Bild 2 zu sehen.

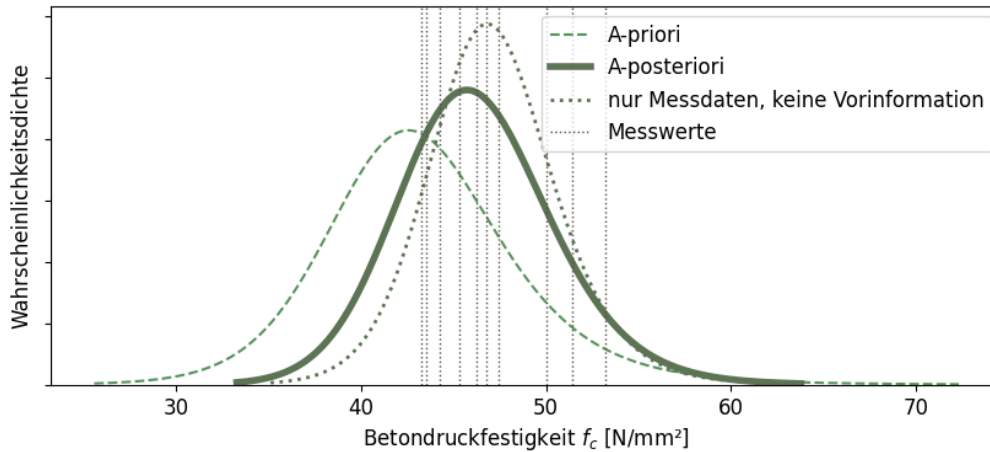


Bild 2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das Anwendungsbeispiel 2.

Probability distributions of the second application example.

6 Zusammenfassung

Mit dem vorgestellten probabilistischen Ansatz, welcher auch in einer Web-App umgesetzt wurde [4], kann die Betondruckfestigkeit probabilistisch quantifiziert werden, unter Berücksichtigung aller vorhandenen Informationen. Um vorhandenes Vorwissen (z.B. Informationen aus der Planungs- und Ausführungsphase) mit Messungen zu kombinieren, wird ein Bayes'scher Ansatz verwendet.

Der Wert f_{ck} der charakteristischen Betondruckfestigkeit ist als 5%-Quantil der Verteilung der Betondruckfestigkeit definiert und kann direkt aus dem vorgeschlagenen probabilistischen Modell ermittelt werden. Aufbauend darauf kann eine Bemessung nach dem semiprobabilistischen Teilsicherheitskonzept erfolgen.

Appendix A: Herleitungen

Die gesamte Bayes'sche Modellierung erfolgt für log-transformierte Messwerte $y_i = \log d_i$. Für diese log-transformierten Messwerte ergibt sich folgende Likelihood-Funktion $L^*(\theta_1, \theta_2 | y_1, \dots, y_n)$ (unter den im Haupttext genannten Randbedingungen, vergleiche auch [7]):

$$L^*(\theta_1, \theta_2 | y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{\theta_2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta_2}{2} \cdot (y_i - \theta_1)^2\right). \quad (13)$$

Durch Umstellen erhält man:

$$L^*(\theta_1, \theta_2 | y_1, \dots, y_n) \propto (\sqrt{\theta_2})^n \exp\left(-\frac{\theta_2}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1)^2\right), \quad (14)$$

$$L^*(\theta_1, \theta_2 | y_1, \dots, y_n) \propto \theta_2^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\theta_2}{2} \cdot n \cdot (s^2 + (m - \theta_1)^2)\right), \quad (15)$$

mit m und s^2 entsprechend Glg. (4) und (5).

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der A-posteriori-Verteilung $p(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0, \kappa_0, \eta_0, \xi_0^2, n, m, s^2)$ ist proportional zum Produkt aus der Prior und der Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} p(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0, \kappa_0, \eta_0, \xi_0^2, n, m, s^2) \\ \propto \theta_2^{\frac{\eta_0-1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \theta_2 (\eta_0 \xi_0^2 + \kappa_0 (\theta_1 - \gamma_0)^2)\right) \\ \cdot \theta_2^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\theta_2}{2} \cdot n \cdot (s^2 + (m - \theta_1)^2)\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Mit etwas Umstellen erhält man:

$$\begin{aligned} p(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0, \kappa_0, \eta_0, \xi_0^2, n, m, s^2) \\ \propto \theta_2^{\frac{\eta_0+n-1}{2}} \\ \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \theta_2 (\eta_0 \xi_0^2 + \kappa_0 (\theta_1 - \gamma_0)^2 + ns^2 + n(m - \theta_1)^2)\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Der folgende Ausdruck kann weiter umgestellt werden:

$$\begin{aligned}
& \eta_0 \xi_0^2 + \kappa_0 (\theta_1 - \gamma_0)^2 + ns^2 + n(m - \theta_1)^2 \\
&= \eta_0 \xi_0^2 + \kappa_0 \theta_1^2 - 2\kappa_0 \theta_1 \gamma_0 + \kappa_0 \gamma_0^2 + ns^2 + nm^2 - 2nm\theta_1 + n\theta_1^2 \\
&= \eta_0 \xi_0^2 + (\kappa_0 + n)\theta_1^2 - 2\theta_1(\kappa_0 \gamma_0 + nm) + \kappa_0 \gamma_0^2 + ns^2 + nm^2 \\
&= \eta_0 \xi_0^2 + (\kappa_0 + n) \left[\theta_1^2 - 2\theta_1 \frac{\kappa_0 \gamma_0 + nm}{\kappa_0 + n} + \left(\frac{\kappa_0 \gamma_0 + nm}{\kappa_0 + n} \right)^2 \right] \\
&\quad - \frac{(\kappa_0 \gamma_0 + nm)^2}{\kappa_0 + n} + \frac{\kappa_0^2 \gamma_0^2 + n\kappa_0 \gamma_0^2 + \kappa_0 ns^2 + \kappa_0 nm^2 + n^2 s^2 + n^2 m^2}{\kappa_0 + n} \\
&= \kappa_n (\theta_1 - \gamma_n)^2 \\
&\quad + \frac{n\kappa_0 \gamma_0^2 + \kappa_0 \eta_0 \xi_0^2 + n\eta_0 \xi_0^2 + \kappa_0 ns^2 + \kappa_0 nm^2 + n^2 s^2 - 2\kappa_0 \gamma_0 nm}{\kappa_0 + n} \\
&= \kappa_n (\theta_1 - \gamma_n)^2 + \eta_0 \xi_0^2 + ns^2 + \frac{n\kappa_0 (m - \gamma_0)^2}{\kappa_0 + n} \\
&= \kappa_n (\theta_1 - \gamma_n)^2 + \eta_n \left(\frac{\eta_0}{\eta_0 + n} \xi_0^2 + \frac{n}{\eta_0 + n} \left(s^2 + \frac{\kappa_0 (m - \gamma_0)^2}{\kappa_0 + n} \right) \right) \\
&= \kappa_n (\theta_1 - \gamma_n)^2 + \eta_n \xi_n^2
\end{aligned}$$

Somit kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Posterior-Verteilung ausgedrückt werden als:

$$p(\theta_1, \theta_2 | \gamma_0, \kappa_0, \eta_0, \xi_0^2, n, m, s^2) \propto \theta_2^{\frac{\eta_n - 1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \theta_2 (\eta_n \xi_n^2 + \kappa_n (\theta_1 - \gamma_n)^2)\right),$$

was einer Normal-Gamma-Verteilung entspricht.

Literatur

- [1] Schnell, Jürgen and Fischer, Alexander and Loch, Markus (2009) *Anwendung von Teilsicherheitsbeiwerten auf Bestandsbauten im Hochbau*. Forschungsbericht F 2719, Zukunft Bau, Technische Universität Kaiserslautern.
- [2] DIN EN 12504-1 (2020) Prüfung von Beton in Bauwerken - Teil 1: Bohrkernproben - Herstellung, Untersuchung und Prüfung der Druckfestigkeit. Deutsche Fassung EN 12504-1:2019 + AC:2020.
- [3] DIN EN 13791 (2019) Bewertung der Druckfestigkeit von Beton in Bauwerken und in Bauwerksteilen. Deutsche Fassung EN 13791:2019.
- [4] Eracons GmbH (2025) *Betondruckfestigkeit – statistische Analyse*, Webseite, eracons.com/concrete-f_ck.

- [5] Geyer, S., Papaioannou, I., & Straub, D. (2023) *Spatial modeling of concrete strength based on data*. *Structural Safety*, 103, 102345.
- [6] DIN EN 1990 (2010) *Eurocode 0: Grundlagen der Tragwerksplanung*. Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010.
- [7] Geyer, S., Papaioannou, I., & Straub, D. (2021) *Bayesian analysis of hierarchical random fields for material modeling*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 66, 103167.
- [8] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., & Rubin, D. B. (2003) *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC.
- [9] Vu, C. C., & Ho, N. K. (2023) A comparative study on the probability distribution model for the compressive strength of concrete with consideration of the size effect. *Journal of Engineering Research*.
- [10] Silvestri, S., Gasparini, G., Trombetti, T., & Ceccoli, C. (2008) Statistical analysis towards the identification of accurate probability distribution models for the compressive strength of concrete. In *Proceedings of the 14th World Conference on Earthquake Engineering*. Beijing, China.
- [11] Torrent, R. J. (1978) The log-normal distribution: A better fitness for the results of mechanical testing of materials. *Matériaux et Construction*, 11, 235-245.
- [12] JCSS (2001) *JCSS Probabilistic Model Code*. JCSS web site, <https://www.jcss-lc.org/jcss-probabilistic-model-code/>.
- [13] Teichgräber, M., Köhler, J., & Straub, D. (2022) *Hidden safety in structural design codes*. *Engineering Structures*, 257, 114017.
- [14] Vrouwenvelder, T., Beck, A., Proske, D., Faber, M., Köhler, J., Schubert, M., Straub, D. & Teichgräber, M. (2025) *Interpretation of probability in structural safety – A philosophical conundrum*. *Structural Safety*, 113, 102473.
- [15] DIN EN 1992 (2011) *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*. Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010.

Autor:innen

Dr.-Ing. Wolfgang Betz (Korrespondenzautor)

betz@eracons.com

Eracons GmbH

Athener Straße 44

81545 München

Dr.-Ing. Iason Papaioannou

papaioannou@tum.de

Technische Universität München

Professur für Risikoanalyse und Zuverlässigkeit

Theresienstraße 90

80333 München

Prof. Dr. sc. techn. Daniel Straub

straub@tum.de

Technische Universität München

Professur für Risikoanalyse und Zuverlässigkeit

Theresienstraße 90

80333 München